

水平 2 方向地震力の合成方法の比較検証

MSP0003-R00
2016 年 9 月 21 日
エムエス配管解析技術
水野 貞男

1. まえがき

構造物には振動し易い方向があり、その方向に揺らされた場合に最大応答を示す。機器・配管の水平方向の耐震解析も、目的の物理量が最大値をとる方向に地震力を入力して解析すべきであるが、実際計算では、任意に直交座標系を定めてモデル化し、座標軸方向に地震力を入力して解析し、得られた結果から保守的な合成計算を行って最終応答を求めている^(注記1)。

こうした手法を採る理由は、求めるべき物理量^(注記2)の最大値を得るためには、その物理量に対し個々別々にパラメータサーベイ計算する必要があり、計算が膨大になるためである。そこで、パラメータサーベイ計算の代替として保守的な合成計算を行うが、その方法には凡そ 4 通りの方法がある⁽¹⁾。

本資料は、これら 4 通りの方法に就いて相互に比較し、保守性を検証した結果をまとめたものである。

(注記1) 耐震解析としては、ここでは、モーダル法床応答スペクトル解析を前提としている。

(注記2) 物理量としては、例えば、ある点での変位(d_x, d_y, d_z)・内力(F_x, F_y, F_z)・主応力($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)などがあるが、それらに限らず、いくつかの物理量の組み合わせで決まるものまでを考えると、物理量は無限に存在する。無限に存在する物理量の全ての最大値を求めると言うようなことは、そもそも不可能である。

2. 解析座標系と水平 2 方向の合成

特定の容器やタンクに関しては、特異構造断面に合わせて水平 2 方向に直交座標系を取り、それぞれに適した地震力(必ずしも同じ値ではない)を入力して解析するが、一般の機器・配管では、構造の特異性は考慮せず、任意の直交座標系を取って、保守的に定めた同じ地震力で水平 2 方向に解析し、得られた結果を保守的に合成して設計評価している。従って、床応答スペクトルに方向性がある場合は包絡し、水平 2 方向に同じ地震力を入力する。

このようにすれば、水平 2 方向に解析した時、図1に示すように、この解析座標系の任意方向(Z 軸から θ 傾いた方向)に入射する地震力 S_θ は、次のように表される。

$$S_\theta = S_Z \cos \theta + S_X \sin \theta \quad (1)$$

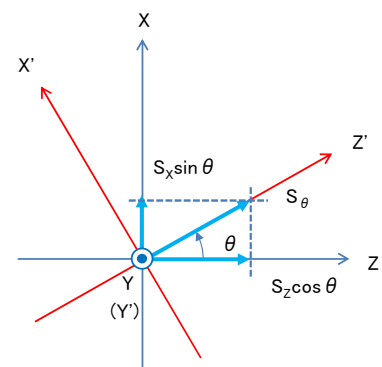
ここで、 S_θ : θ 回転した Z' 方向の地震入力ベクトル

S_Z : Z 方向の地震入力ベクトル

S_X : X 方向の地震入力ベクトル

また、 S_θ に対する地震応答 R_θ は、 S_Z, S_X に対する地震応答 R_Z, R_X を用いて次式の通り計算できる。

$$R_\theta = R_Z \cos \theta + R_X \sin \theta \quad (2)$$



$$S_\theta = S_Z \cos \theta + S_X \sin \theta$$

図1 地震力入力方向 θ

ここで、 R_θ : θ 回転した Z' 方向の地震力 S_θ に対する地震応答 (の組)
 R_z : Z 方向の地震力 S_z に対する地震応答 (の組)
 R_x : X 方向の地震力 S_x に対する地震応答 (の組)

ここで最大応答は、 θ をパラメータにサーベイ計算を行えば、求めることができるが、実際の計算は、全ての物理量 (反力・モーメント・変位・加速度・・・などの成分毎、それらの組合せ毎) に就いて、ここが重要であるが、「個々別々にパラメータサーベイ計算をする」必要があり、計算が膨大となる。また、求めるべき物理量の数を限定し、ある特定数の物理量としても、その最大値全部を一挙に求めることはできないし、更に、このようなサーベイ計算を常に行うのでは、設計解析としても通用しない。

そこで現実的には、任意に定めた解析座標系で解析し、水平 2 方向に関し保守的な合成計算を行って、応答を定めている。

3. 水平 2 方向の合成計算法とその大小関係の検証

水平 2 方向の合成計算法には、従来から採用されているものとして、表 1 に示す①～⑤の 5 つの方法 (以下、これらを「5 法」と呼ぶ。) がある。①は、上記で説明したパラメータ θ による本来の方法である。

以下、「5 法」(①～⑤) に就いて、それらの大小関係を検証する。

表 1 水平 2 方向の応答の合成方法

No.	名称	合成方法
①	基本的な方法 (θ による方法)	任意座標系 XYZ に於いて耐震解析し、水平 2 方向の応答 R_z, R_x を得たとする。 R_z : 地震力 S_z を Z 方向に入力したときの応答 (の組) R_x : 地震力 S_x を X 方向に入力したときの応答 (の組) Z 軸より θ 傾いた方向に地震力 S_θ が入力された時の応答 R_θ は次式で計算され、 θ に関しパラメータサーベイ計算を行えば、最大値 (① _{max}) を求め得る。 $R_\theta = R_z \cos \theta + R_x \sin \theta$ これが本来の方法で、最適な最大値を与えるが、目的の物理量 (反力・モーメント・応力・歪・変位・速度・加速度など) に対し個々別々に θ を変化させて最大値を求める必要があり、計算が膨大で実際の計算は困難である。また、求めるべき物理量の数を限定したとしても、最大値全部を一挙に求めることはできないし、更に、このようなサーベイ計算を常に行うのでは、設計解析としても通用しない。
②	絶対値和 による方法	同上で、成分毎に、応答値 R_{ABS} を次式で合成。 $R_{ABS} = R_z + R_x $
③	SRSS による方法	同上で、成分毎に、応答値 R_{SRSS} を次式で合成。米国で用いられている方法。 $R_{SRSS} = \sqrt{R_z^2 + R_x^2}$
④	成分の大きい方 を取る方法	同上で、応答成分を比較し、大きい方を取って応答値 R_{SELE} とする。 $R_{SELE} = \{ \max(R_{xz}, R_{xx}), \max(R_{yz}, R_{yx}), \max(R_{zz}, R_{zx}), \dots \}$
⑤	M_i 大小など、特別な 条件を付帯して 評価する方法	同上で、例えば、モーメント M に関しては、水平 2 方向の合成モーメントを $M_{IZ} = \sqrt{M_{XZ}^2 + M_{YZ}^2 + M_{ZZ}^2} \text{ と } M_{IX} = \sqrt{M_{XX}^2 + M_{YX}^2 + M_{ZX}^2}$ として計算し、大きい方を選んで、応答値 R_{SPCON} とする。 $R_{SPCON} = \max(M_{IZ}, M_{IX})$

(注記) ④⑤は、①の最大値 (①_{max}) に対する常時の保守性が保証されていないので、使用しない方がよい。

(1) 絶対値和による方法(②)

これは、2 方向の解析値に関して絶対値和を取って評価する方法である。

元々、耐震解析(動解析)は、1 次～n 次までのモード応答を SRSS 合成するので、合成応答値は基本的には正值($0 \leq R_X$, $0 \leq R_Y$, $0 \leq R_Z$)である。従って、水平 2 方向の単純和を取っても、絶対値和になる。即ち、

$$R_{ABS} \equiv |R_Z| + |R_X| = R_Z + R_X \quad (3)$$

この保守性は以下の通りである。

基本となる①との大小関係を検討するため、 R_{ABS} と R_θ の差を取ると、

$$\begin{aligned} R_{ABS} - R_\theta &= (R_Z + R_X) - (R_Z \cos \theta + R_X \sin \theta) \\ &= R_Z(1 - \cos \theta) + R_X(1 - \sin \theta) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq 1 - \cos \theta$, $0 \leq 1 - \sin \theta$ であり、 $0 \leq R_X$, $0 \leq R_Z$ であるから、

$$0 \leq R_Z(1 - \cos \theta) + R_X(1 - \sin \theta) = R_{ABS} - R_\theta$$

となる。故に、

$$R_\theta \leq R_{ABS} \quad (4)$$

が得られる。絶対値和 R_{ABS} は R_θ よりも常に保守的な値を与えることが分かる。

尚、この評価②は過度に安全側となるため、一般的には採用されていない(注記3)。

(注記3) 参考であるが、我が国では、従来、水平方向(動解析)と上下方向(静解析)の重ね合わせには絶対値和が採用されてきた。また、米国では、1 次～n 次までのモード応答の合成に於いて、固有振動数が極めて接近している場合は絶対値和を取ると規定している。このように絶対値和も一部では採用されている。Regulatory Guide 1.92などを参照。

(2) SRSS による方法(③)

次に、2 方向に関して SRSS を取る方法である。

$$R_{SRSS} \equiv \sqrt{R_Z^2 + R_X^2} \quad (5)$$

これは米国で採用されている方法である。尚、米国では、従来から上下方向も動解析を行っており、3 軸方向に拡張した SRSS となっている。我が国も、2006 年 9 月には、耐震設計審査指針が改定され、上下方向も動解析となり、最終的に 3 軸方向の SRSS になった。

水平 2 方向に対する保守性を検討するため、 R_θ と R_{SRSS} の自乗の差を取ると、

$$\begin{aligned} R_{SRSS}^2 - R_\theta^2 &= R_{SRSS}^2 - (R_Z \cos \theta + R_X \sin \theta)^2 \\ &= R_Z^2 + R_X^2 - (R_Z^2 \cos^2 \theta + 2R_Z R_X \cos \theta \sin \theta + R_X^2 \sin^2 \theta) \\ &= R_Z^2(1 - \cos^2 \theta) + R_X^2(1 - \sin^2 \theta) - 2R_Z R_X \cos \theta \sin \theta \\ &= R_Z^2 \sin^2 \theta + R_X^2 \cos^2 \theta - 2R_Z R_X \cos \theta \sin \theta \\ &= (R_Z \sin \theta - R_X \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

と展開され、右辺の最終項 $(R_Z \sin \theta - R_X \cos \theta)^2$ は、正值(0 以上)となるので、

$$0 \leq R_{SRSS}^2 - R_\theta^2$$

となり, R_θ に対する R_{SRSS} の保守性が証明される。 ($\because 0 \leq R_{SRSS}$)

$$R_\theta \leq R_{SRSS} \quad (6)$$

また, 絶対値和 R_{ABS} と R_{SRSS} とを比較するため, それぞれを自乗して差を取ると,

$$\begin{aligned} R_{ABS}^2 - R_{SRSS}^2 &= (|R_Z| + |R_X|)^2 - (\sqrt{R_Z^2 + R_X^2})^2 \\ &= (R_Z + R_X)^2 - (R_Z^2 + R_X^2) \\ &= R_Z^2 + 2R_Z R_X + R_X^2 - R_Z^2 - R_X^2 \\ &= 2R_Z R_X \end{aligned}$$

となり, $0 \leq R_X$, $0 \leq R_Z$ であるから, $0 \leq 2R_Z R_X \leq R_{ABS}^2 - R_{SRSS}^2$ となる。故に, ($\because 0 \leq R_{SRSS}$, $0 \leq R_{ABS}$)

$$R_{SRSS} \leq R_{ABS} \quad (7)$$

の関係が得られる。

(3) 成分の大きい方を取る方法(④)

これは, 2 方向の応答に関して成分毎に比較し, 大きい成分を取る方法である。

数式による①との大小関係の証明は難しいので, 別途, 例題を用いて検証するものとし(注記4), ここでは③との比較のみを行う。例えば, 配管のモーメントに関して, 2 方向の応答を

$$\begin{aligned} \text{Z 方向応答: } R_Z &= (M_{XZ}, M_{YZ}, M_{ZZ}) \\ \text{X 方向応答: } R_X &= (M_{XX}, M_{YX}, M_{ZX}) \end{aligned}$$

とすれば, R_{SELE} は次のようになる。

$$R_{SELE} = \{ \max(M_{XZ}, M_{XX}), \max(M_{YZ}, M_{YX}), \max(M_{ZZ}, M_{ZX}) \} \quad (8)$$

ここで, X 成分に就いて $M_{XX} \leq M_{XZ}$ と仮定し, R_{SRSS} と比較すると,

$$M_{XZ} \leq \sqrt{M_{XZ}^2 + M_{XX}^2}$$

となることは明らかである。これは, 大きい方を選択する④の方法は小さい成分を無視するのに対し, ③の R_{SRSS} は小さい成分も考慮するので, その分, 保守的となる。従って, 3 成分に就いても上記と同じ関係が成立するので, R_{SRSS} が R_{SELE} よりも保守的になることは明らかである。従って,

$$R_{SELE} \leq R_{SRSS} \quad (9)$$

との結果を得る。

(注記4) ①と④の大小関係の証明は, 数式による一般検証が難しいので, 別途, 例題を用いて計算検証する。それに就いては, 関連資料(2)(3)にまとめたので, そちらを参照願いたい。

(4) M_i の大小など特別な条件を付帯して評価する方法(⑤)

特に配管に関しては、モーメントの3成分をSRSSした「合成モーメント」 M_i を用い、配管方程式による簡便な応力評価を行っている。これに対応し、2方向の応答に関しても、各々の合成モーメント M_i を計算し、その大きい方を評価に用いることが従来行われて来た。即ち、配管モーメントを

$$\left. \begin{array}{l} \text{Z 方向応答: } R_Z = (M_{XZ}, M_{YZ}, M_{ZZ}) \\ \text{X 方向応答: } R_X = (M_{XX}, M_{YX}, M_{ZX}) \end{array} \right\} \quad (10)$$

とし、これから合成モーメント M_i を求め、

$$\begin{aligned} M_{IZ} &= \sqrt{M_{XZ}^2 + M_{YZ}^2 + M_{ZZ}^2} \\ M_{IX} &= \sqrt{M_{XX}^2 + M_{YX}^2 + M_{ZX}^2} \end{aligned}$$

これらを比較し、

$$M_{SPCON} = \text{Max} \{ M_{IZ}, M_{IX} \} \quad (11)$$

として大きい方を選ぶやり方である。

まず、①の R_θ と比較した場合、(10)式は、方法①に於いて、 $\theta=0^\circ$ と $\theta=90^\circ$ とした場合に該当する。 $\theta=0^\circ$ 又は 90° に於いて、①が最大値を取れば、⑤の評価は①の最大値と一致するが、それ以外では、他で最大値となる。従って、⑤の評価は①の R_θ の「最大値」を超えることはないと判明する。即ち、

$$R_{SPCON} \leq R_{\theta, \max} \quad (12)$$

次に、本法 R_{SPCON} と成分毎に大きい方を取る方法 R_{SELE} との比較はどうかであるが、成分毎に大きい方を選ぶので、まず、

$$\left. \begin{array}{l} M_{XZ}, M_{XX} \leq \max(M_{XZ}, M_{XX}) \\ M_{YZ}, M_{YX} \leq \max(M_{YZ}, M_{YX}) \\ M_{ZZ}, M_{ZX} \leq \max(M_{ZZ}, M_{ZX}) \end{array} \right\} \quad (13)$$

の関係が成り立つ。ここで、

$$M_{IZ} = \sqrt{M_{XZ}^2 + M_{YZ}^2 + M_{ZZ}^2} \leq M_{IX} = \sqrt{M_{XX}^2 + M_{YX}^2 + M_{ZX}^2}$$

と仮定し、また、成分毎に大きい方を選ぶ方法 R_{SELE} に関しても合成モーメント M_i を考え、合成モーメントの自乗の差を取ると、

$$\begin{aligned} R_{SELE(MI)}^2 - R_{SPCON}^2 &= \{ \max(M_{XZ}, M_{XX}) \}^2 + \{ \max(M_{YZ}, M_{YX}) \}^2 + \{ \max(M_{ZZ}, M_{ZX}) \}^2 - (M_{XX}^2 + M_{YX}^2 + M_{ZX}^2) \\ &= (\{ \max(M_{XZ}, M_{XX}) \}^2 - M_{XX}^2) + (\{ \max(M_{YZ}, M_{YX}) \}^2 - M_{YX}^2) + (\{ \max(M_{ZZ}, M_{ZX}) \}^2 - M_{ZX}^2) \end{aligned}$$

となる。(13)式から、それぞれの()内はゼロ又は正値になることは明らかであるから、上式はゼロ以上になる。故に、

$$R_{SPCON} \leq R_{SELE(MI)} \quad (14)$$

従って、合成モーメント M_i の大きい方を選ぶよりも、成分の大きい方を選ぶ方が保守的となることが分かる。

5. 結論

以上の 5 法の比較検証結果をまとめると、以下の結論が得られる。

(1) まず、②～⑤の 4 通りを比較したが、これらの相互関係は、

$$\textcircled{5} \leq \textcircled{4} \leq \textcircled{3} \leq \textcircled{2} \quad (15)$$

となることが証明された。

(2) また、②③に就いては、

$$\textcircled{1} \leq \textcircled{3} \leq \textcircled{2} \quad (16)$$

となることも分かった。

(3) 更にまた、「①の最大値」($\textcircled{1}_{\max}$)に対しては、

$$\textcircled{5} \leq \textcircled{4} \leq \textcircled{1}_{\max} \quad (17)$$

となることも分かった

(4) 以上をまとめ、「①の最大値」($\textcircled{1}_{\max}$)に関して記述すると、

$$\textcircled{5} \leq \textcircled{4} \leq \textcircled{1}_{\max} \leq \textcircled{3} \leq \textcircled{2} \quad (18)$$

となることが分かった。

5 法のうちどの方法を選ぶかは設計者の判断ではあるが、②③に就いては、①に対して(16)式の関係が常に保証されるので、このうち、適度の余裕を持った③の SRSS 法が妥当と判断される。また、④⑤に就いては、「①の最大値」($\textcircled{1}_{\max}$)に対する常時の保守性が認められないので、使用しない方がよいとの結論である(注記5)。

尚、上記の②～⑤の評価式(3), (5), (8), (11)には、地震入力方向を表すパラメータ θ が含まれていない。このことは、「耐震解析結果は、解析座標系には依存しないこと」、或いは、「耐震解析は、座標系を任意に取って解析できること」を証明していると言える。「耐震解析は、座標系を任意に取って解析できること」と言うのは、余りにも明白な事実であるため、実際の設計現場では殆ど意識したり、議論したりしないが、ここでの重要な結論の一つである。無論、第 2 項の冒頭で述べた「特定の容器やタンク」に就いては例外であることは論を俟たない。

(注記5) 従来用いられてきた④⑤に就いては、「①の最大値($\textcircled{1}_{\max}$)」に対する常時の保守性が保証されていないだけであって、耐震解析が有する総合的な保守性を考えても、全く保守性がないと断定している訳ではない。

6. 関連資料

- (1) 水野貞男「配管の設計解析法」エムエス配管解析技術, 2013 年 5 月, p.228～230, p.243
- (2) MSP0008-R00「3 次元簡易配管モデルによる地震入力方向の検討」
- (3) MSP0009-R00「20B 標準配管モデルによる地震入力方向の検討」