

楕円断面管の内圧負荷解析結果

MSP0013-R00

2022 年 5 月 5 日

エムエス配管解析技術

水 野

1. まえがき

20BSch40 の T 字配管の内圧負荷解析⁽¹⁾⁽²⁾に於いて、ティーズのクロッチ部 45° 断面の内圧応力を解明する必要があり、当該断面を模擬した楕円断面管を想定して内圧応力解析を行った。

本資料は、楕円断面管に内圧を負荷した場合の応力解析結果をまとめたものである。

2. 楕円断面管

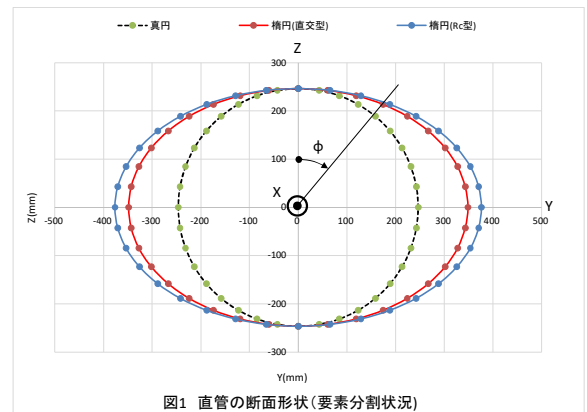
20BSch40 の T 字配管の内圧負荷解析モデルに対応させ、表 1 に示す楕円断面を設定した。

T 字配管に対応して長径・短径比 (a/b) は、1.414 (直交型) と 1.527 (Rc 型) の 2 種類^(注記 1)を設定した。併せて、基本的な解析として 20BSch40 真円管の解析も行った。尚、T 字配管に対応させ、楕円断面の短径 b は 20BSch40 真円管の平均半径 r と同じとした。

図 1 に各管の断面形状を示す。

表 1 直管の寸法仕様

項目	記号	単位	真円断面管	楕円断面管	
				直交型	Rc 型
呼び径	—	—	20B	20B*	20B*
肉厚	—	—	Sch40	Sch40	Sch40
材質	—	—	SUS304	SUS304	SUS304
外径	Do	mm	508.0	—	—
内径	Di	mm	477.8	—	—
肉厚	t	mm	15.1	15.1	15.1
管平均外径	Dm	mm	492.9	—	—
管平均半径	r	mm	246.45	—	—
長半径 (平均)	a	mm	—	348.48	376.40
短半径 (平均)	b	mm	—	246.45	246.45
長径・短径比	a/b	—	—	1.414	1.527
直管長さ	L	mm	5000	5000	5000



(注記 1) 楕円断面管は、20BSch40 ティーズの直交型モデルの相貫線部 45° 断面、Rc 型モデルのクロッチ部 45° 断面に対応し、各半楕円部を全楕円に拡張した管である。

3. 解析モデル

図 2 に解析モデルを示す。

図 1 に示したように断面の周方向は真円の場合は 10° 分割の 36 等分割、楕円の場合は 7° ~15° の不等 36 分割とした^(注記 2)。

図 3 に軸方向の要素分割の概要を示す。

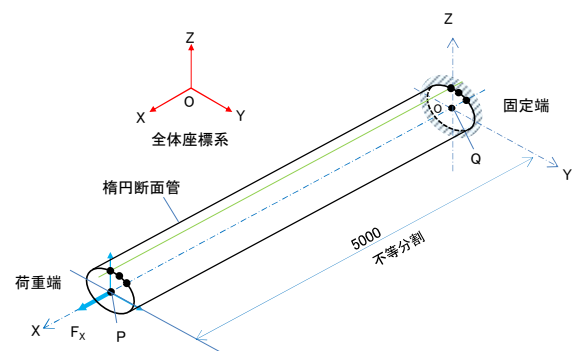


図2 楕円断面管のシェル解析モデル

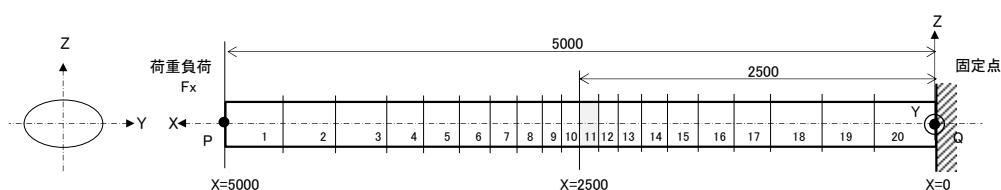


図3 楕円断面管の解析モデル (NTS)

直管の長さは 5,000mm とし、軸方向の分割は 20 分割で、最大要素長さは 1Do の 500mm とした。中央部近傍では 40mm とした。これは、真円断面管、楕円断面管ともに、周方向の最小要素長さは約 43mm であるので、それとほぼ同じである。

解析プログラムは SAPIV とし、4 節点の四辺形板シェル要素 (type6) を用いた。

総節点数は 756、総要素数は 720 とした。

解析温度は 20℃ の常温とし、20℃ の SUS304 の材料定数は以下とした。

- (1) 縦弾性係数 : $E=19900\text{kg/mm}^2$
- (2) ポアソン比 : $\nu=0.30$

シェル解析に必要なとなる材料定数は、これらの値から計算した。

(注記 2) 楕円断面は、媒介変数 θ を用いて $Y=asin\theta$ 、 $Z=b\cos\theta$ として節点の座標値を決めている。刻みは $\theta=10^\circ$ 一定としているが、実際の節点は、座標原点周りの角度 $\phi=10^\circ$ の等分割にはならない。そのため、図 1 でも分かるように、節点間の長さも変化する。また今回の場合は、短半径 b と真円の半径 r とは一致させているので、 θ が同じ真円の点と楕円の点の Z 座標値は同じになり、 Y 座標値は、 r よりも大きい a を用いる分、横にずれた形になる。

4. 荷重・境界条件

内圧 P としては、モデル全体に $P=500\text{kg/cm}^2$ (注記 3) を負荷した。

管端の Q 点を固定し、他端 P 点はフリーとして内圧の対する等価軸力 F_x を負荷した。

表 2 に示す F_{xi} を P 点上の節点に負荷した。

表2 内圧に対する等価軸力 F_x の計算

表2 内圧に対する等価軸力F _x の計算						
項目		記号	単位	真円型	直交型	Rc型
解析No.		—	—	ELLIP00P	ELLIP02P	ELLIP03P
長半径（肉厚中心）		a	mm	246.45	348.48	376.40
短半径（肉厚中心）		b	mm	246.45	246.45	246.45
肉厚		t	mm	15.1	15.1	15.1
周方向の分割数		N	個	36	36	36
内圧力		P	kg/cm ²	500	500	500
楕円面積	（参考）	S=π ab	mm ²	190,812.8	269,809.3	291,426.0
受圧面積	三角形断面(注)	S _i	mm ²	5,273.5	7,456.7	8,054.1
	総面積	S=Σ S _i	mm ²	189,845.5	268,441.6	289,948.7
等価軸力	総荷重	F _x	kg	949,228	1,342,208	1,449,744
解析入力値	節点荷重	F _{xi} =F _x /36	kg	26,367.4	37,283.6	40,270.7

(注) 三角形面積 S_i は、媒介変数 θ 一定で分割した場合、三角形要素の形状によらず一定となる。

固定端 Q 点の境界条件は表 3 に示す通りとした。

回転変位 XYZ に就いては全てフリーとした。また併進変位 X は全て固定し、 YZ 方向は、基本的に荷重がかからないので、座標軸上の節点のみ その直交方向の自由度 (Y か Z) を固定とした。

(注記 3) 負荷内圧 500kg/cm^2 に特に意味はない。

表3 固定端Q点の境界条件

角度 ϕ	Q点 節点番号	併進変位			回転変位		
		X	Y	Z	X	Y	Z
0°	721	1	1	0	0	0	0
$10^\circ \sim 80^\circ$	722~729	1	0	0	0	0	0
90°	730	1	0	1	0	0	0
$100^\circ \sim 170^\circ$	731~738	1	0	0	0	0	0
180°	739	1	1	0	0	0	0
$190^\circ \sim 260^\circ$	740~747	1	0	0	0	0	0
270°	748	1	0	1	0	0	0
$280^\circ \sim 350^\circ$	749~756	1	0	0	0	0	0

5. 解析結果

変形と応力に就いて以下に説明する。

5.1 変形

直管中央に当たる $X=2500\text{mm}$ に於ける断面の断面変形を図 4(1)～(3)に示す。変形は見やすくするため拡大・縮小しているが、各断面の拡大率が異なるので、変位の大きさを直接比較することはできない。飽くまでも変形の様子を見るものと考えて頂きたい。

尚、要所の変位量を朱記したので参照願いたい。

(1) 真円管

図 4(1)は真円の場合で、内圧による膨脹変位は円周上に一様に発生し+0.855mmである。

この変位は、主に円周方向の膜引張り応力 $\sigma_{m\phi}$ に対応した「円周方向膜引張り歪 $\varepsilon_{m\phi}$ 」による変位である。

(2) 楕円管

これに対して図 4(2)、(3)に示す楕円管の場合は非常に大きな変位を生じる。表 4 にまとめて示すが、真円になるように変形し、長径頂点は凹み、短径頂点は凸む。このような大きな変形が出る原因は、次項の応力に於いて述べる。

長径短径比 a/b が 1.414 から 1.527 に、僅か 8%の増加ではあるが、変位の絶対値は 50%近い増加となる。

表4 楕円断面管の内圧負荷時の変位

区分		長径短径比 a/b	長径頂点a	短径頂点b
			$\phi=90^{\circ}, 270^{\circ}$	$\phi=0^{\circ}, 180^{\circ}$
楕円断面	直交型	1.414	-281.63	415.31
	Rc型	1.527	-389.67	624.52

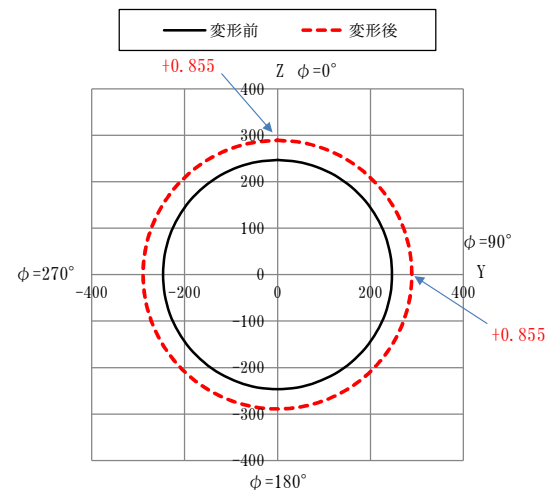
5.2 応力

配管の中央部に当たる第 11 番目の要素列 ($X=2480\text{mm}$) の応力を図 5(1)～(3)に示す。

(1) 真円管

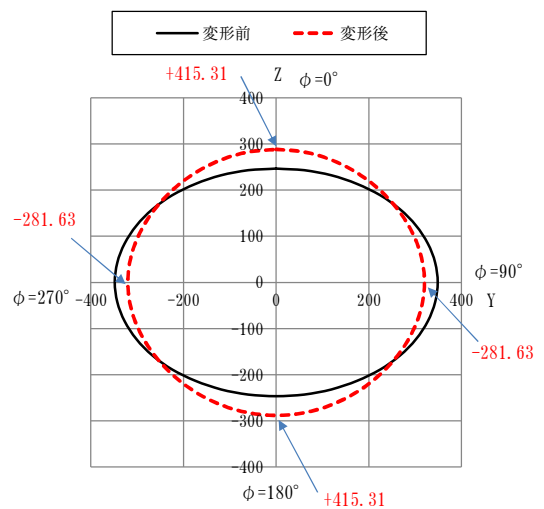
図 5(1)は真円管の場合を示すが、周・軸方向ともに円周方向に一定の膜応力 $\sigma_{m\phi}$ 、 σ_{mL} となり、断面平均値は、

$$\begin{aligned}\sigma_{m\phi} &= 81.29 \text{ kg/mm}^2 \\ \sigma_{mL} &= 40.64 \text{ kg/mm}^2\end{aligned}$$



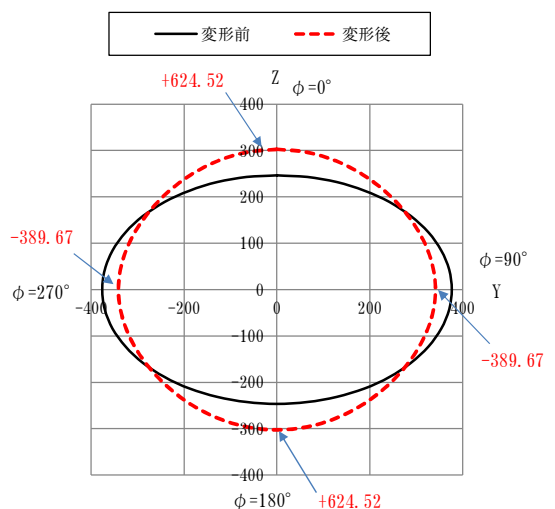
(注記) 朱記は扁平化変位(mm)を示す。

図4(1) 真円管 ($X=2500$) 断面変形



(注記) 朱記は扁平化変位(mm)を示す。

図4(2) 楕円管(直交型) ($X=2500$) 断面変形



(注記) 朱記は扁平化変位(mm)を示す。

図4(3) 楕円管(Rc型) ($X=2500$) 断面変形

となった。これは、周方向基準応力： $S_{\phi}=81.61\text{kg/mm}^2$ ，軸方向基準応力： $S_L=40.80\text{kg/mm}^2$ に一致した。
板曲げ応力はゼロで全く発生しない。

【参考】5.1 項(1)の膨脹変位は次の通り計算できる。

$$\varepsilon_{m\phi} = \frac{1}{E}(\sigma_{m\phi} - \nu\sigma_{mL}) = \frac{1}{19900}(81.29 - 0.300 \times 40.64) = \frac{1}{19900} \times 69.10 = 0.00347$$

$$\delta r = 246.45 \times 0.00347 = 0.855\text{mm}$$

(2) 楕円管

図5(2)，(3)は楕円管の場合を示すが、楕円管では、膜応力、板曲げ応力ともに、角度 ϕ に依存して変動し、長径頂点a ($\phi=90^\circ$ ， 270°)や短径頂点b ($\phi=0^\circ$ ， 180°)に於いて極値を取ることが分かる。

表4に、楕円管の応力をまとめて示す。

尚、ティーズの応力を検討する都合上、本解析の応力を規格化する場合の基準応力は、上記(1)項に示した真円管の S_{ϕ} 値、 S_L 値を用いる。

まず、膜応力の平均値に関して説明する。

楕円管は、真円管に比べ管の断面積が大きくなるので、その分 膜応力の平均値が大きくなる。それぞれの平均応力は表4に示す通りであるが、真円に比べて $\sigma_{m\phi}$ は **18%，23%**， σ_{mL} は **15%，19%**と、それぞれa/bに比例して大きくなること分かる。

ティーズのクロッチ部 45° 断面に当てはめると、当該部の断面積が大きくなり、断面平均の内圧応力（1次応力的な応力）が増大する訳ではあるが、実際のティーズの 45° 断面では長手方向には極めて短い局所となるため、この応力の増大は2次応力としての取り扱いになる。

次に膜応力の最大最小値に関して説明する。

周方向膜応力 $\sigma_{m\phi}$ は相対的に大きく変動し、特に長径頂点で **SI=1.396** (a/b=1.414)，**SI=1.503** (a/b=1.527)と高値を示す。これに対して、短径頂点では **SI=1.027** (a/b=1.414)，**SI=1.044** (a/b=1.527)となり、3～4%の小さな増加である。

軸方向膜応力 σ_{mL} は、周方向膜応力 $\sigma_{m\phi}$ に比較して変動は僅かである。周方向とは逆の動きで、短径頂点で大きくなり、**SI=1.229** (a/b=1.414)，**1.244** (a/b=1.527)と20%程増加し、長径頂点では **SI=1.097** (a/b=1.414)，**1.161** (a/b=1.527)と10%～16%と比較的に小さな増加に留まる。

ティーズのクロッチ部 45° 断面の内圧応力を考える場合は、以上の膜応力の増大を念頭に入れておくことが必要である。

最後に、板曲げ応力であるが、膜応力に比べて劇的に変動し、且つ周方向板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ が卓越することが認められる。

図5(2)，(3)から、周方向板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ は、短径・長径頂点で非常に大きな値を示し、絶対値で最大 **1,800～2,900kg/mm²**にもなる。また 180° の周期のきちんとした cosine カーブをなしており、典型的な「扁平化応力」（この場合は「扁平化矯正応力」）となっていることが分かる。

これに対して軸方向曲げ応力 σ_{bL} は、表4に示した通り、 $\sigma_{bL}/\sigma_{b\phi}$ 比が0.300とポアソン比 ν となっており、明らかに $\sigma_{bL}=\nu\sigma_{b\phi}$ の関係で、 σ_{bL} は $\sigma_{b\phi}$ に付随して発生する。

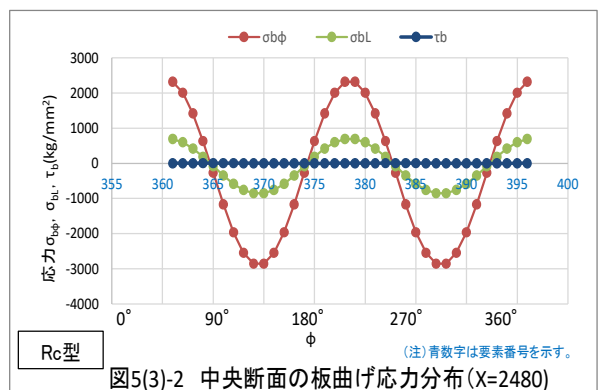
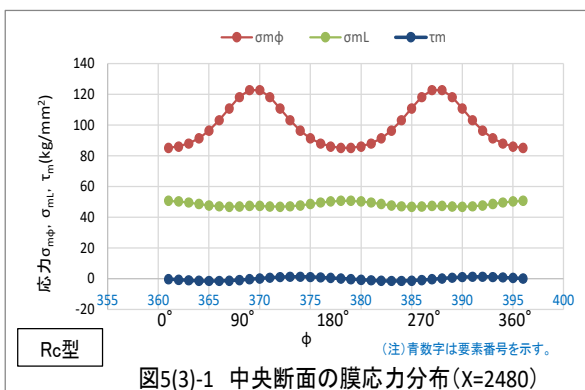
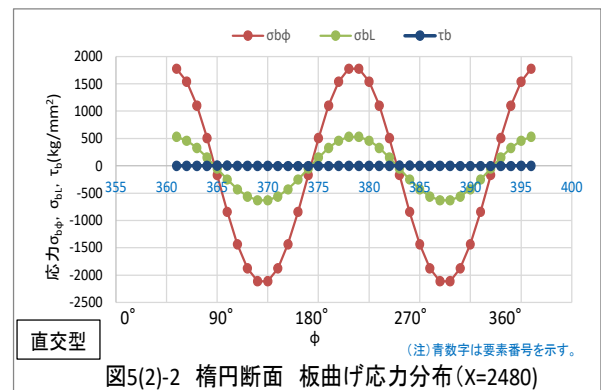
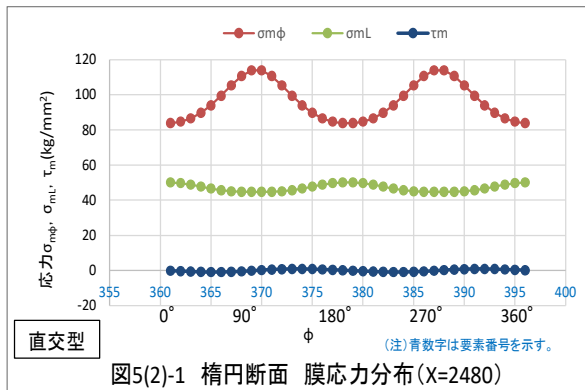
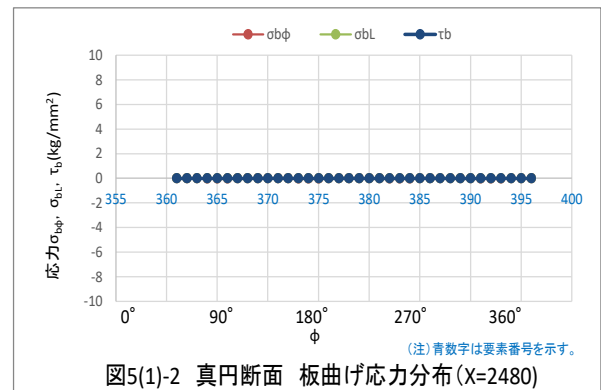
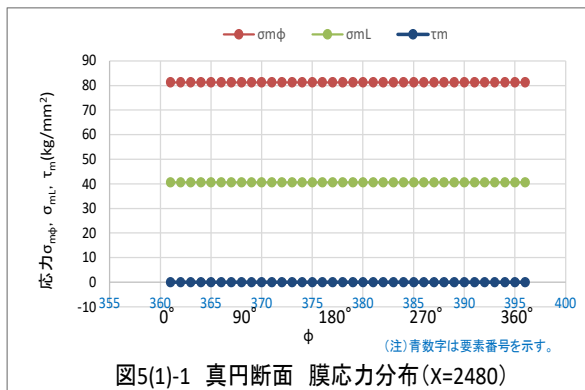
以上、特に非常に大きな値を示す周方向板曲げ応力が、5.1 項(2)で説明した大きな断面変位が出た原因で

ある。

尚、板曲げ応力によって発生する変位は「扁平化(矯正)変位」であり、非常に大きく、内圧によって管壁が引き伸ばされる上記 5.1 項(1)の「膨脹変位」、即ち「円周方向の膜引張り応力 $\sigma_{m\phi}$ による変位」とは全く性質が異なる。

注意すべきは、負荷内圧 $P=500\text{kg/cm}^2$ と大きいため、弾性解析(線形解析)では、いくらでも大きな変位が算出され、実際の扁平量とはかけ離れた結果になっていることである。

本来、楕円断面管に内圧を負荷した場合、板曲げの「扁平化(矯正)変位」は、飽くまでも真円に矯正されるまでで、それ以上は大きくはなり得ない。即ち、真円に矯正された後の挙動は、ここが大事だが、「板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ 、 σ_{bL} はゼロとなり」、純粋に真円に対する内圧膜引張り応力 $\sigma_{m\phi}$ の負荷状態に移る筈であるが、しかし今の弾性解析(線形解析)では移行しないため、矛盾した結果が出るのである。当たり前ではあるが、負荷の途中での状態変化(剛性マトリックスや荷重の変化)は、有限変形解析や非線形解析によって逐次解析しなければ正しくは解けないのである。



参考に、楕円断面が真円に矯正される板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ を手計算で求めると、参考資料Aの通りとなる。

手計算値の変位、応力は、解析値の大略1/6～1/10の大きさである。

表A-1より、例えばRc型(a/b=1.527)の場合、扁平量 $w_0=64.975\text{mm}$ に対しての板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ は、長径頂点で -493.02kg/mm^2 、短径頂点で 242.96kg/mm^2 となる。

上記のシェル解析結果では、変位量 $(\delta_a, \delta_b) = (+624.52\text{mm}, -389.67\text{mm})$ に対して板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ は、それぞれ -2857.77kg/mm^2 、 2318.32kg/mm^2 となったので、これらを変位量の比 $-w_0/\delta_a$ 、 w_0/δ_b を掛けて補正すると、板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ は、長径頂点で -476.52kg/mm^2 、短径頂点で 241.20kg/mm^2 となる。これらは上記の手計算値とよく一致することが分かる。直交型(a/b=1.414)の場合も同様である。

表5 楕円断面管の内圧負荷 応力、応力指数

応力: (kg/mm²)、応力指数SI: (無単位)

区分		長径短径比 a/b	応力成分 成分比	短径頂点b		長径頂点a		断面 平均応力	
				$\phi=0^{\circ} , 180^{\circ}$		$\phi=90^{\circ} , 270^{\circ}$			
				応力	応力指数SI	応力	応力指数SI	応力	応力指数SI
楕円 断面	直交型	1.414	$\sigma_{m\phi}$	83.81	1.027	113.90	1.396	96.44	1.182
			σ_{mL}	50.15	1.229	44.75	1.097	47.03	1.153
			$\sigma_{b\phi}$	1,774.92	—	-2,109.38	—	-167.29	—
			σ_{bL}	529.98	—	-630.24	—	-50.13	—
			$\sigma_{bL} / \sigma_{b\phi}$	0.299	—	0.299	—	0.300	—
	Rc型	1.527	$\sigma_{m\phi}$	85.18	1.044	122.70	1.503	100.20	1.228
			σ_{mL}	50.77	1.244	47.37	1.161	48.40	1.166
			$\sigma_{b\phi}$	2,318.32	—	-2,857.77	—	-269.84	—
			σ_{bL}	692.07	—	-853.65	—	-80.84	—
			$\sigma_{bL} / \sigma_{b\phi}$	0.299	—	0.299	—	0.300	—

(注記) $\sigma_{m\phi}$ の応力指数SI(赤字)は、周方向基準応力 $S_\phi=81.61\text{kg/mm}^2$ で基準化したもの。

σ_{mL} の応力指数SI(青字)は、軸方向基準応力 $S_L=40.80\text{kg/mm}^2$ で基準化したもの。

6. 結果のまとめ

楕円断面管、真円断面管の内圧負荷解析を実施し、以下のことが判明した。

(1) 真円断面管は、内圧による膨脹変位は円周上一様に発生し $+0.855\text{mm}$ となった。また周・軸方向とも円周方向に一定応力となり、所謂「周方向基準応力」 S_ϕ や「軸方向基準応力」 S_L に一致した。

板曲げ応力はゼロで全く発生しない。

(2) 楕円断面管は、いずれも真円になるように変形し、長径側頂点は凹み、短径側頂点は^{つぼく}凸んだ。変位量は、長径・短径比a/bにより大きな違いがあり、a/b=1.414の場合は $+415.31\text{mm}$ 、 -281.63mm 、a/b=1.527の場合は $+624.52\text{mm}$ 、 -389.67mm となった。

(3) 楕円管の場合は、断面積が大きくなる分平均応力が大きくなった。真円の場合に比べ、a/bに比例し、 $\sigma_{m\phi}$ 、 σ_{mL} の平均応力が15%～20%程度大きくなった。局所の応力増大であり、2次応力である。

(4) 楕円断面管の場合、周・軸方向膜応力 $\sigma_{m\phi}$ 、 σ_{mL} は、角度 ϕ に依存して変動し、長径・短径頂点に於いて極値となった。

周方向膜応力 $\sigma_{m\phi}$ は相対的に大きく変動し、長径頂点でSI=1.396(a/b=1.414)、SI=1.503(a/b=1.527)と高値を示し、短径頂点ではSI=1.027(a/b=1.414)、SI=1.044(a/b=1.527)となり、3～4%の増加となった。

軸方向膜応力 σ_{mL} は変動は僅かで、短径頂点でSI=1.229(a/b=1.414)、1.244(a/b=1.527)と20%程増加し、

長径頂点では $SI=1.097$ ($a/b=1.414$), 1.161 ($a/b=1.527$) と 10%~16%と比較的に小さな増加に留まった。

(4) 周方向板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ は、 180° 周期のきれいな cosine カーブで分布し、長径・短径頂点で極値(絶対値) $1,800\sim 2,900\text{kg/mm}^2$ を示した。軸方向板曲げ応力 $\sigma_{bL}=\nu \sigma_{b\phi}$ の関係となった。

これらが扁平化矯正板曲げ応力となって大きな断面変位を発生させた。

尚、本解析による断面の扁平化矯正応力は、現実的な値を遙かに超えた(6 倍~10 倍の)仮想のものである。手計算で実態ベースの値を把握したので、それらを参照することが必要である。

(5) 楕円断面を真円断面に矯正する場合の板曲げ応力を手計算で求め、シェル解析で得られた板曲げ応力を変位比で補正した結果、手計算結果とよく一致した。

7. 関連資料

- (1) MSP0014-R00「直交型モデルによる T 字配管の内圧負荷解析の結果」
- (2) MSP0015-R00「Rc 型モデルによる T 字配管の内圧負荷解析の結果」

参考資料 A

1. まえがき

楕円断面を真円に矯正するための曲げモーメントと曲げ応力を検討する。

2. 楕円断面の真円矯正

図 A-1 に示すような楕円断面（赤線）を真円断面に矯正することを考える。

真円に矯正した場合の最大曲げモーメント M は、矯正前後の曲率半径の変化から求めることができる。

扁平量は w_0 、とすれば、頂点 a, b での矯正曲げモーメント M_a, M_b は、それぞれ次の通りである。

$$M_a = -D \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (1)$$

$$M_b = D \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (2)$$

ここに、 $D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}$: 曲げ剛さ

$r_a = \frac{b^2}{a}$: 頂点 a での初期曲率半径

$r_b = \frac{a^2}{b}$: 頂点 b での初期曲率半径

r_0 : 真円半径

であり、楕円の長半径 a 、短半径 b は、真円半径 r_0 、扁平量 w_0 を用いて次のように表される。

$$a = r_0 + w_0 \quad b = r_0 - w_0$$

$$r_0 = \frac{a + b}{2} \quad w_0 = \frac{a - b}{2}$$

円周方向板曲げ応力 σ_ϕ は、(1)、(2) 式による曲げモーメント M を用いて

$$\sigma_\phi = \frac{6M}{t^2}$$

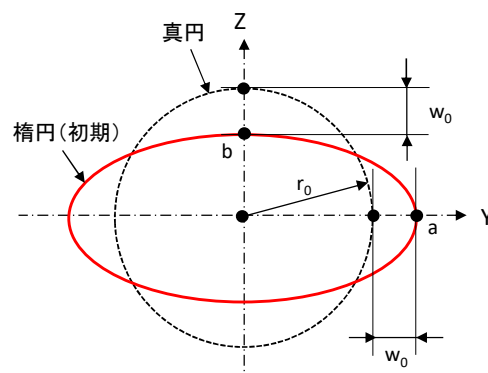
として計算できる。

3. 計算結果

曲げモーメントと板曲げ応力は手計算によって表 A-1 の通り得られた。

真円に矯正するための板曲げ応力は、Rc 型楕円 ($a/b=1.527$) の場合、長径頂点 a で -493.02kg/mm^2 、短径頂点 b で 242.96kg/mm^2 となった。

これに対してシェル解析による板曲げ応力 $\sigma_{b\phi}$ を、本文の表 4 から求めると、表 A-1 の下の方の欄に示すように長径頂点 a で -2857.77kg/mm^2 、短径頂点 b で 2318.32kg/mm^2 と得られた。これを、手計算時の変位



図A-1 楕円断面管の真円矯正

量 $\pm w_0$ に相当する応力に換算するため、変位量の比 $(-w_0/\delta_a, w_0/\delta_b)$ を掛けて補正すると、補正後の解析板曲げ応力 σ_{ac}^* 、 σ_{bc}^* は、それぞれ -476.52kg/mm^2 、 241.20kg/mm^2 となり、手計算の結果とよく一致する。

表A-1 楕円断面の真円矯正 モーメント, 曲げ応力の計算

区分	項目	記号	単位	真円型	直交型	Rc型
	解析No.	—	—	ELLIP00P	ELLIP02P	ELLIP03P
手計算	肉厚	t	mm	15.10	15.10	15.10
	長半径	a	mm	246.45	348.48	376.40
	短半径	b	mm	246.45	246.45	246.45
	長径・短径比	a/b	—	1.000	1.414	1.527
	平均半径	$r_0=(a+b)/2$	mm	246.45	297.47	311.43
	扁平量	$w_0=(a-b)/2$	mm	0.000	51.015	64.975
	縦弾性係数	E	kg/mm ²	19,900	19,900	19,900
	ポアソン比	ν	—	0.300	0.300	0.300
	板曲げ剛さ	$D=Et^3/12(1-\nu^2)$	kg/mm ²	6,274,242.2	6,274,242.2	6,274,242.2
	楕円曲率半径	長径頂点	$r_a=b^2/a$	mm	174.29	161.36
		短径頂点	$r_b=a^2/b$	mm	492.75	574.87
	矯正モーメント	長径頂点	$Ma=-D(1/r_a-1/r_0)$	kgmm	-14,905.9	-18,735.5
		短径頂点	$Mb=D(1/r_b-1/r_0)$	kgmm	8,359.3	9,232.7
	板曲げ応力	長径頂点	$\sigma_a=6Ma/t^2$	kg/mm ²	0.0	-493.02
		短径頂点	$\sigma_b=6Mb/t^2$	kg/mm ²	219.97	242.96
シェル解析	解析板曲げ応力	長径頂点	σ_{ac}	kg/mm ²	0.0	-2857.77
		短径頂点	σ_{bc}	kg/mm ²	0.0	2318.32
	解析変位	長径頂点	δ_a	mm	0.0	-389.67
		短径頂点	δ_b	mm	0.0	624.52
	変位量比	長径頂点	$-w_0/\delta_a$	—	—	0.17
		短径頂点	w_0/δ_b	—	—	0.10
	補正後の解析板曲げ応力	長径頂点	σ_{ac}^*	kg/mm ²	0.0	-476.52
		短径頂点	σ_{bc}^*	kg/mm ²	0.0	241.20

変更来歴

記号	年月日	変更来歴	備考
R00	2022.05.05	初版発行	